

La suite de Fibonacci

Dans le précédent numéro de la revue *Routes*, nous avons parlé du nombre d'or et évoqué l'existence d'une relation profonde entre ce nombre et une suite de nombres, connue sous le nom de "Suite de Fibonacci". Découvrez-en les secrets.

Une suite de Fibonacci est une suite de nombres dans laquelle les deux premiers termes sont égaux à 1 et chaque terme (à partir du troisième) est la somme des deux termes précédents : 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233 - 377...

Son inventeur Léonardo Fibonacci (1175 - 1240), également connu sous le nom de Léonard de Pise, fut l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Homme d'affaires international, il avait profité de ses voyages pour s'initier aux sciences du Moyen-Orient et en particulier au système de calcul arabe, alors bien plus perfectionné que le système romain employé à l'époque en Europe.

On doit à Fibonacci un important traité, le *Liber Abaci* (1202), où il exposa les connaissances mathématiques des Arabes et introduisit l'emploi des chiffres dits "arabes" et l'étude de la suite de nombres à laquelle la postérité a donné le nom de "Suite de Fibonacci".

■ Énigme démographique

Dans son traité, Fibonacci ne s'intéressa pas uniquement aux systèmes de numération, mais ouvrit son champ d'investigation aux différents domaines des mathématiques. Il y a donné la première liste de problèmes d'algèbre en Europe : l'une de ses douze énigmes est aussi le premier problème de démographie. Même si cette discipline ne devait apparaître que beaucoup plus tard (17^e siècle), même s'il s'agit seulement d'illustrer une question d'arithmétique, le problème de Fibonacci contient déjà les ingrédients qu'utiliseront les démographes à partir du 17^e siècle : la progression géométrique, la référence aux populations animales et l'homogénéité temporelle. Le problème est simple : un couple de lapins est déposé, dès sa naissance, sur une île déserte qu'il va peupler de sa progéniture. On admet que le couple reproduit, chaque saison, un nouveau couple (la grossesse dure une saison) et



que la maturité sexuelle est atteinte au bout d'une autre saison. Pour simplifier encore, on suppose que ces heureux lapins ne meurent jamais et ne deviennent pas stériles. "Quelle sera la population lapine au bout de « n » saisons ?" s'interroge Fibonacci.

Il est tout d'abord facile de voir que la population d'une année donnée est composée de couples matures et de couples immatures. Le nombre de couples matures est égal à la population totale de l'année précédente puisque les couples immatures sont arrivés à maturité et que les couples matures ont survécu. Le nombre de couples immatures est égal à la population des couples matures de l'année précédente qui l'a engendrée, donc à la population totale deux ans auparavant. La population totale d'une année donnée est ainsi la somme des populations totales des deux années précédentes. En partant du couple fondateur qui a été déposé dans l'île à sa naissance, on calcule facilement la population de lapins, année après année. En d'autres termes, le nombre de couples de lapins est une suite dans laquelle chaque terme (à partir du 3^e) est la somme des deux termes précédents, à savoir : 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 89 - 144 - 233 - 377 - etc. C'est la suite traditionnelle de Fibonacci. Cette suite est croissante et l'on aboutit rapidement à des termes très grands. Ce qui donne, selon les hypothèses de Fibonacci, une idée de la vitesse de prolifération d'une population de lapins.

■ Rapport avec le nombre d'or

Désireux d'en savoir davantage, Fibonacci eut l'ingénieuse idée de comparer deux termes consécutifs de la suite, c'est-à-dire d'étudier comment se comporte le rapport de deux termes consécutifs en fonction de la position de ces termes dans la suite. Au début, ce rapport est toujours compris entre 1 et 2, puis il se rapproche d'une valeur constante, au fur et à mesure que l'on progresse dans la suite. En poursuivant à l'infini ce calcul, on aboutit à la valeur de 1,6180339887... et on retrouve le fameux nombre d'or !

Si l'on définit la suite de Fibonacci comme étant une suite de nombres dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes précédents, on peut facilement en déduire qu'il en existe une infinité. En effet, une suite quelconque de cet ensemble est parfaitement définie et identifiée si l'on se donne les deux premiers termes. La suite traditionnelle de Fibonacci est, par conséquent, la suite dans laquelle les deux premiers termes sont égaux à 1.

■ Phénomènes naturels

Le nombre d'or et la suite de Fibonacci n'ont rien d'artificiel. La nature en a tiré parti bien avant que l'homme ne les découvre. Dans le règne animal, certaines structures comme la coquille de nautilus (voir illustration), sont régies par des lois mathématiques rigoureuses. Leurs formes s'appuient sur le nombre d'or et la suite traditionnelle de Fibonacci.

On peut faire ce même constat dans le règne végétal avec les cycles foliaires caractéristiques de certaines espèces végétales (poirier, pommier, chêne, tilleul, orme, aulne, rameau...).

Aussi intrigant que cela puisse paraître, la suite de Fibonacci, suite de nombres générés par un processus mathématique simple, constitue une clé de lecture pour bon nombre de phénomènes naturels complexes. ●